Vecteurs : égalité, somme, produit par un réel, colinéarité

Cours

« Il nous faut encore une autre analyse, proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement la situation, comme l'algèbre exprime la grandeur. »

Gottfried Wilhelm Leibniz, lettre à Christiaan Huygens (1679)

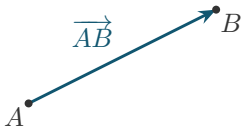
Un vecteur décrit un **déplacement** : glisser tout droit, sans tourner, d'une certaine longueur, dans une direction et un sens donnés. Sur un quadrillage, on le lit en comptant les carreaux : « 3 vers la droite, 1 vers le haut ».

I. Vecteurs, égalité de deux vecteurs

Définition 1. Vecteur. Soient A et B deux points distincts. Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

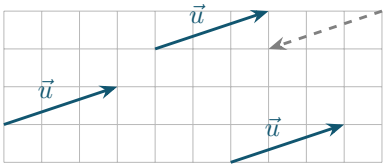
- sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
- son **sens** : de A vers B ;
- sa **longueur** : la longueur AB.

On le représente par une flèche d'**origine** A et d'**extrémité** B. On l'appelle aussi le **vecteur déplacement** de A à B : il décrit la translation qui envoie A sur B. Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.



origine A, extrémité B

Définition 2. Égalité de deux vecteurs. Deux vecteurs sont **égaux** lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur. Les flèches qui représentent un même vecteur en sont des **représentants** ; on note ce vecteur par une seule lettre, par exemple $\vec{u}$.



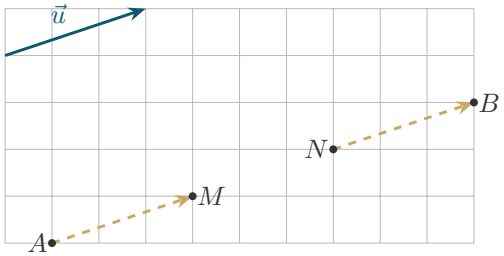
trois représentants de $\vec{u}$; la flèche grise, de sens contraire, n'en est pas un

Propriété 1. Pour tout point A et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$: c'est l'extrémité du représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

Remarque (vecteur position). Quand on choisit un point O comme origine du plan, à chaque point M correspond le vecteur $\overrightarrow{OM}$, appelé **vecteur position** de M (relativement à O) : deux points distincts n'ont jamais le même vecteur position.

Exemple 1. Sur le quadrillage, construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$, puis le point N tel que $\overrightarrow{NB} = \vec{u}$.

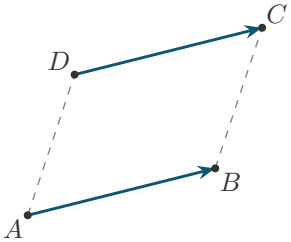
Solution. $\vec{u}$ fait avancer de 3 carreaux vers la droite et 1 vers le haut. On part de A et on fait ce déplacement : on obtient M. Pour N, c'est B qui est l'extrémité : on part de B et on fait le déplacement contraire (3 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas). On obtient N, et $\overrightarrow{NB} = \vec{u}$.



II. Parallélogramme et milieu

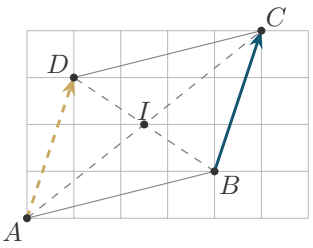
Propriété 2. Parallélogramme. Soient A, B, C, D quatre points. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **si et seulement si** $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). On a alors aussi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Attention à l'ordre des lettres : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, et non $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Propriété 3. Milieu. I est le milieu du segment $[AB]$ **si et seulement si** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Exemple 2. Les points A, B, C sont placés sur le quadrillage. Construire le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, puis son centre I.



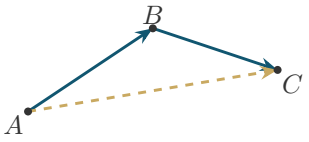
Solution. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (propriété 2). De B à C : 1 carreau vers la droite et 3 vers le haut. On fait ce déplacement à partir de A : on obtient D. Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu : I est le milieu de $[AC]$ (et de $[BD]$), donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$.

III. Somme de deux vecteurs

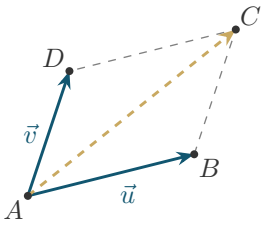
Définition 3. Somme de deux vecteurs. La **somme** $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur du déplacement obtenu en faisant le déplacement $\vec{u}$, puis le déplacement $\vec{v}$: si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Propriété 4. Relation de Chasles. Pour tous points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Propriété 5. Règle du parallélogramme. Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ ont la même origine A, alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, où C est le point tel que $ABCD$ est un parallélogramme.



Définition 4. Opposé, différence. L'**opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$: même direction, même longueur, sens contraire. On note $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$; ainsi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

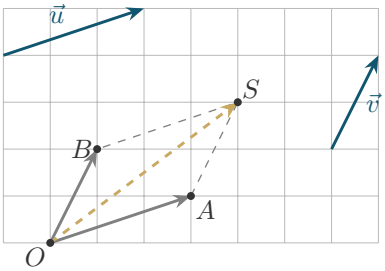
La **différence** $\vec{u} - \vec{v}$ est la somme $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Remarque. Avec la propriété 3 : I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Exemple 3. Simplifier $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}$, puis $\vec{z} = \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF}$.

Solution. On change l'ordre des termes pour que les lettres s'enchaînent : $\vec{w} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$. Soustraire $\overrightarrow{GF}$, c'est ajouter son opposé $\overrightarrow{FG}$: $\vec{z} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EG}$.

Exemple 4. Construire le représentant d'origine O du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



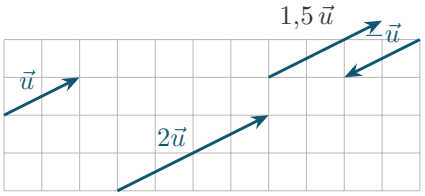
Solution. On construit A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et B tel que $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, puis le point S tel que $OASB$ soit un parallélogramme : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS}$ (propriété 5). On peut aussi enchaîner : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, puis $\overrightarrow{AS} = \vec{v}$, et $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OS}$ (Chasles).

IV. Produit d'un vecteur par un réel

Définition 5. Produit d'un vecteur par un réel. Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ a :

- la même **direction** que $\vec{u}$;
- le même **sens** que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$;
- pour **longueur** $|k|$ fois la longueur de $\vec{u}$.

Si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$. On a $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.



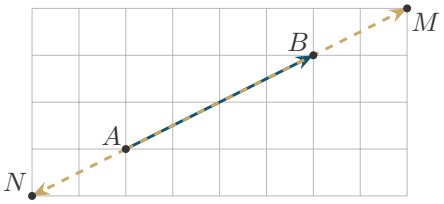
Propriété 6. Règles de calcul (admises). Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et tous réels k, k' : $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$; $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$; $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

On calcule donc avec les vecteurs comme avec des expressions littérales.

Remarque. I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exemple 5. Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Solution. $\overrightarrow{AB}$: 4 carreaux vers la droite et 2 vers le haut. $\frac{3}{2} > 0$: $\overrightarrow{AM}$ a le sens de $\overrightarrow{AB}$; $\frac{3}{2} \times 4 = 6$, $\frac{3}{2} \times 2 = 3$: 6 carreaux vers la droite et 3 vers le haut. $-\frac{1}{2} < 0$: $\overrightarrow{AN}$ a le sens contraire ; $-\frac{1}{2} \times 4 = -2$, $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$: 2 carreaux vers la gauche et 1 vers le bas.



Exemple 6. Écrire plus simplement $\vec{w} = 2(\vec{u} - 3\vec{v}) + 5\vec{v}$.

Solution. On développe, puis on réduit (propriété 6) : $\vec{w} = 2\vec{u} - 6\vec{v} + 5\vec{v} = 2\vec{u} - \vec{v}$.

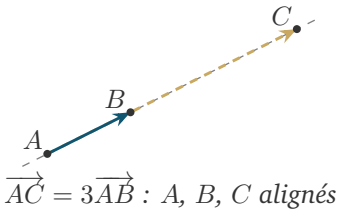
V. Colinéarité

Définition 6. Vecteurs colinéaires. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsque l'un est le produit de l'autre par un réel : il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (ou $\vec{u} = k\vec{v}$). Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur ; deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.

Propriété 7. Parallélisme. Soient $A \neq B$ et $C \neq D$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles **si et seulement si** les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété 8. Alignement. Les points A, B et C sont alignés **si et seulement si** les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

En effet, deux droites parallèles qui ont un point commun A sont confondues.



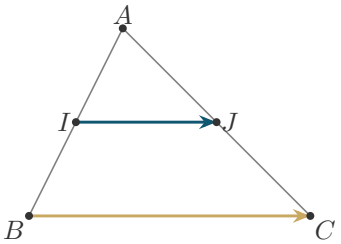
$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$: *A, B, C alignés*

Exemple 7. ABC est un triangle, I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$. Démontrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

Solution. I milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; J milieu de $[AC]$: $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Avec la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires : les droites (IJ) et (BC) sont parallèles (propriété 7).



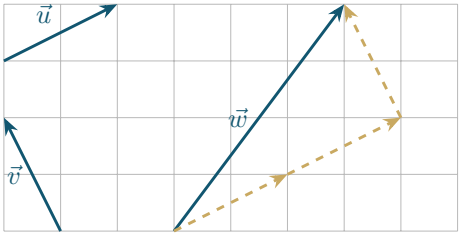
VI. Combinaison de deux vecteurs non colinéaires

Propriété 9. Combinaison de deux vecteurs (admise). Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Tout vecteur $\vec{w}$ s'écrit d'une seule façon $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, où a et b sont des réels.

Méthode : démontrer un parallélisme ou un alignement

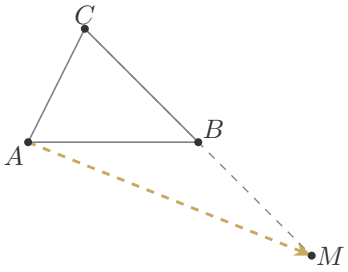
1. Choisir deux vecteurs non colinéaires de la figure, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Exprimer les vecteurs utiles en fonction de ces deux vecteurs, avec la relation de Chasles et les règles de calcul.
3. Trouver le réel k qui montre la colinéarité, puis conclure avec la propriété 7 (parallélisme) ou 8 (alignement).

Exemple 8. Sur le quadrillage, exprimer $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.



Solution. On va de l'origine de $\vec{w}$ à son extrémité en suivant d'abord la direction de $\vec{u}$, puis celle de $\vec{v}$: deux fois $\vec{u}$, puis une fois $\vec{v}$. Donc $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$.

Exemple 9. ABC est un triangle et M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Démontrer que les points B, C et M sont alignés.



Solution. On exprime $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, avec la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Donc $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BC}$: les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, et les points B, C, M sont alignés (propriété 8). B est même le milieu de $[CM]$.